

Extraction of harmonics from trigonometric polynomials by amplitude and phase operators

V. I. Danchenko and D. G. Vasilchenkova

Extraction of harmonics of a given order from real trigonometric polynomials (signals) is one of the main problems in harmonic analysis. It has many applications in physics, radio and electrical engineering, in particular, in filtration of harmonic signals of different nature. There exist many methods (mainly, approximative) for solution of this problem. The most common ones are spectral methods based on Fourier transform and other resonance principles.

In this paper we propose a new method for extracting harmonics by amplitude and phase transformation of trigonometric polynomials. These transformations use the two simplest operations — multiplication by a real constant and phase shift — to obtain polynomials *similar* to the initial ones. A harmonic is extracted by an amplitude and phase operator that simply overlays (sums up) a finite number of such *similar* polynomials. The overlay method enables us to obtain precise analytical formulas for calculating harmonics of a given order.

Keywords: amplitude and phase operator, discrete moment problem, Prony method, regularization

ВЫДЕЛЕНИЕ ГАРМОНИК ИЗ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В. И. Данченко, Д. Г. Васильченкова

Аннотация. Выделение гармоник заданного порядка из вещественных тригонометрических полиномов (сигналов) — одна из важных задач гармонического анализа. Она имеет множество приложений в физике, радиотехнике, электротехнике, например, в процессах фильтрации гармонических сигналов разной природы. Разработано немало методов (в основном приближенных) решения этой задачи. Наиболее известными являются спектральные методы на основе Фурье-преобразований и других резонансных принципов.

В настоящей работе для выделения гармоник предлагается новый метод амплитудно-фазовых преобразований тригонометрических многочленов. Они переводят многочлены в *подобные* им, совершая две простейшие операции — домножение на вещественную константу и сдвиг по фазе. Гармоника выделяется амплитудно-фазовым оператором, представляющим собой простое наложение (сложение) конечного числа подобных многочленов. Метод наложения позволил получить точные аналитические формулы для вычисления гармоник заданного порядка.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Пусть имеется тригонометрический многочлен

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \tau_k(x), \quad \tau_k(x) := a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(для удобства мы рассматриваем многочлены без свободного члена). Амплитудно-фазовым оператором (АФО) порядка $\leq n$ этого многочлена будем называть преобразование вида

$$(1.1) \quad H_m(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; x) = \sum_{j=1}^n X_j \cdot T_n(x - \lambda_j), \quad X_j, \lambda_j \in \mathbb{R}$$

(порядок АФО равен числу различных слагаемых (1.1), в которых $\exp(i\lambda_j)$ попарно различны, а $X_j \neq 0$). Наша основная

Задача. Подбором амплитуд X_j и начальных фаз λ_j получить гармонику с заданным номером $\mu = \overline{1, n}$ в виде:

$$(1.2) \quad \tau_\mu(x) = H_n(T_n, \{X_j\}, \{\lambda_j\}; x).$$

Определение. Решение X_j, λ_j будем называть допустимым, если выполнено условие (А): параметры X_j, λ_j вещественны и не зависят от T_n .

⁰Работа выполнена при финансовой поддержке ДРПННТ N⁰ 1.1348.2011, РФФИ (проект N⁰ 14-01-00510), Минобрнауки России (задание N⁰ 1.574.2016/ФПМ).

Key words and phrases. амплитудно-фазовый оператор, задача дискретных моментов, метод Прони, регуляризация.

Отметим, что если некоторые $X_j = 0$, или не все $\exp(i\lambda_j)$ попарно различны, то порядок АФО (1.1) будет, очевидно, строго меньше n .

Определение. Решение X_j, λ_j будем называть регулярным, если выполнено условие (\mathcal{A}') : *порядок АФО в точности равен n , т.е. если в (1.1) все $\exp(i\lambda_j)$ попарно различны, а $X_j \neq 0$.*

Примечание 1. Отметим, что основная трудность задачи (1.2) состоит в том, что АФО должен быть *вещественным и иметь порядок $\leq n$* . Действие вещественного АФО имеет простой физический смысл фильтрации: из смеси T_n гармоник выделяется гармоника $\tau_\mu(x)$ наложением подобных сигналов, отличающихся лишь амплитудами и начальными фазами.

Задача выделения отдельных гармоник из сигнала — одна из важных задач гармонического и спектрального анализа. Она имеет многочисленные приложения в физике, радиотехнике, электротехнике, например, в процессах фильтрации гармонических сигналов разной природы (см., [1] — [3]).

1.2. Кратко остановимся на основных методах и результатах работы. Несложно показать (см. п. 2.1), что задача (1.2) равносильна неполной системе дискретных моментов с неизвестными $Y_j := X_j z_j$ и $z_j := e^{-i\lambda_j}$:

$$(1.3) \quad \begin{cases} Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n & = \sigma_1 \\ \dots & \dots \\ Y_1 z_1^{\mu-1} + Y_2 z_2^{\mu-1} + \dots + Y_n z_n^{\mu-1} & = \sigma_\mu, \quad Y_j = X_j z_j, \quad z_j = e^{-i\lambda_j}, \\ \dots & \dots \\ Y_1 z_1^{n-1} + Y_2 z_2^{n-1} + \dots + Y_n z_n^{n-1} & = \sigma_n \end{cases}$$

при условии (\mathcal{A}) , которое можно записать в другой форме:

(\mathcal{A}) : $\sigma_k = 0$ при $k \neq \mu$ и $\sigma_\mu = 1$, $z_j = e^{-i\lambda_j}$, все λ_k и X_k вещественны (некоторые X_k могут быть нулевыми).

Как будет видно из дальнейшего (см. раздел 3), при решении задач (1.2) и (1.3) основную роль играет вспомогательный вещественный параметр

$$(1.4) \quad \omega := X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

подбором которого и удовлетворяется условие (\mathcal{A}) . Наиболее полные результаты получены при дополнительном условии:

$$(1.5) \quad n = s\mu - 1, \quad s \in \mathbb{N}.$$

В этом случае получены явные формулы для решений задач (1.2) и (1.3). Основная идея решения состоит в следующем. Система (1.3) дополняется до полной системы моментов (см. (3.1)) добавлением уравнения (1.4) и уравнений, комплексно сопряженных с (1.3). Полученная система (3.1) в силу условий (\mathcal{A}) равносильна системе (1.3). Важно то, что вещественность амплитуд X_k в совместной системе (3.1) выполняется автоматически (лемма 1). Для решения полных систем моментов обычно применяется классический метод Прони [4], причем для его эффективности требуется дополнительно условие регулярности (\mathcal{A}') . Однако при $\mu \geq 2$ и условии (1.5) все решения задач (1.2) и (1.3) не являются регулярными (теорема 2), что приводит к невозможности применения метода Прони. Для таких случаев в разделе 5 разработано несколько методов регуляризации задачи (3.1) определенными вариациями правых частей. Это позволило предельными переходами из решений регуляризованных систем получить допустимые решения задач (1.2) и (1.3) (теоремы 6, 7).

Методами регуляризации показано, что для разрешимости задач (1.2) и (1.3) достаточно, чтобы параметр ω являлся корнем уравнения $U_s(\omega/2) = 0$, где U_s — многочлен Чебышева второго рода степени s .

В случаях $\mu = 1, 2$ это условие является и необходимым (теоремы 3, 6), что позволяет найти все допустимые и регулярные решения $\{X_j(\mu, \omega)\}$, $\{\lambda_j(\mu, \omega)\}$.

В каждом случае $\mu \geq 1$ при условии (1.5) имеет место неединственность: существует s различных решений $\{X_j(\mu, \omega_k)\}$, $\{\lambda_j(\mu, \omega_k)\}$, соответствующих s различным корням ω_k уравнения $U_s(\omega/2) = 0$ (теоремы 3, 6, 7).

Отметим, что для удобства мы рассматриваем многочлены без свободного члена a_0 . В общем случае, когда $a_0 \neq 0$, вместо (1.2) имеем

$$(1.6) \quad a_0 \omega + \tau_\mu(x) = H_n(T_n, \{X_j(\omega)\}, \{\lambda_j(\omega)\}; x),$$

где ω — корень уравнения $U_s(\omega/2) = 0$.

Отметим еще, что для найденных решений равенство (1.6) выполняется не только на многочленах, но и на достаточно широком классе сходящихся тригонометрических рядов (см. примечания 3, 4). Например, в случае выделения первой гармоники равенство (1.6) выполняется на тригонометрических рядах, в которых отсутствуют гармоники с номерами $\pm 1 + (n+2)k$, $(n+2)k$, $k \in \mathbb{N}$.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АМПЛИТУД И ФАЗ

2.1. Имеем

$$\begin{aligned} \tau_k(x) &= \frac{a_k}{2} (e^{ixk} + e^{-ixk}) - i \frac{b_k}{2} (e^{ixk} - e^{-ixk}) = \\ &= \left(\frac{a_k}{2} - i \frac{b_k}{2} \right) e^{ixk} + \left(\frac{a_k}{2} + i \frac{b_k}{2} \right) e^{-ixk} = \alpha_k e^{ixk} + \overline{\alpha_k e^{ixk}}. \end{aligned}$$

Поэтому при $z_j = e^{-i\lambda_j}$ получаем

$$\begin{aligned} T_n(x - \lambda_j) &= \sum_{k=1}^n \tau_k(x - \lambda_j) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k e^{ik(x-\lambda_j)} + \overline{\alpha_k e^{ik(x-\lambda_j)}} \right) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \alpha_k z_j^k e^{ikx}. \end{aligned}$$

Следовательно, при вещественных X_j имеем

$$(2.1) \quad H_n(x) = \sum_{j=1}^n X_j \cdot T_n(x - \lambda_j) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n X_j z_j^k \right) \alpha_k e^{ikx} \right).$$

Таким образом, задача (1.2) равносильна системе моментов (1.3) с условием (A). Действительно, если решение (1.3) найдено, то, учитывая (2.1), получим

$$H_n(x) = 2 \cdot \operatorname{Re} (\alpha_\mu e^{i\mu x}) = \tau_\mu(x), \quad \text{где} \quad \alpha_\mu = \frac{a_\mu}{2} - i \frac{b_\mu}{2}.$$

2.2. Случай, когда все z_k различны. В этом случае определитель системы (1.3) — определитель Вандермонда $W(z_1, \dots, z_n) \neq 0$, а $Y_k = Y_k(\mu)$ находятся как скалярные произведения (см., напр., [5], [6]): $Y_k = (\mathcal{L}_k \cdot \mathcal{S})$, где $\mathcal{S} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ и

$$(2.2) \quad \mathcal{L}_k = \frac{1}{\prod_{j \neq k} (z_k - z_j)} \left((-1)^{n-1} \rho_{n-1}^{(k)}, \dots, (-1)^{n-\mu} \rho_{n-\mu}^{(k)}, \dots, -\rho_1^{(k)}, 1 \right),$$

где $\rho_m^{(k)}$ — элементарные симметрические многочлены вида

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1, \quad \rho_m^{(k)} = \rho_m(z_1, \dots, z_{k-1}, 0, z_{k+1}, \dots, z_n), \quad k = \overline{1, n}, \\ \rho_m &:= \rho_m(z_1, \dots, z_n) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} z_{j_1} \dots z_{j_m}, \quad m = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

Отсюда при условии (\mathcal{A}) имеем

$$(2.3) \quad Y_k(\mu) = \frac{(-1)^{n-\mu} \rho_{n-\mu}^{(k)}}{\prod_{j \neq k} (z_k - z_j)}, \quad 1 \leq \mu \leq n, \quad X_k(1) = \frac{(-1)^{n-1} \prod_{j=1}^n z_j}{z_k^2 \cdot \prod_{l \neq k} (z_k - z_l)}.$$

2.3. Регулярное решение задачи (1.2) при $\mu = 1$ и $\mu = n$. Приведем одно элементарное построение АФО.

Пример 1. При $\mu = n$ имеем регулярное решение:

$$(2.4) \quad \lambda_k = 2\pi \frac{k-1}{n}, \quad X_k = \frac{1}{n}, \quad k = \overline{1, n}.$$

При $\mu = 1$ и нечетных $n \geq 3$ имеем регулярное решение (с точностью до знака X_k):

$$(2.5) \quad \lambda_k = \frac{\pi(4k-n)}{n+2}, \quad X_k = \pm \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{s \neq k} \left| \sin \frac{\lambda_s - \lambda_k}{2} \right|^{-1}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Примечание 2. Несложно проверить, что в (2.5) все $z_k = \exp(-i\lambda_k)$ попарно различны и составляют множество

$$\{ \sqrt[n+2]{-1} \} \setminus \{ e^{i\varphi}, e^{-i\varphi} \}, \quad \varphi := \frac{n}{n+2}\pi.$$

Ниже будут найдены все регулярные решения задачи (1.2) при $\mu = 1$ независимо от четности n (см. теорему 3).

Примечание 3. Отметим, что в силу равенств $z_k^{n+2} = -1$ нулевые степенные суммы $\sum_k X_k z_k^\beta$ в (1.3) порядка $\beta \in \overline{2, n}$ остаются нулевыми при замене β на $\beta + (n+2)k$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому формула (1.2) верна и для сходящихся тригонометрических рядов, в которых отсутствуют гармоники с номерами $\pm 1 + (n+2)k$, $(n+2)k$, $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. То, что (2.4) действительно является решением в случае $\mu = n$, легко проверяется непосредственно с учетом вида $H_n(x)$ и равенств

$$\sum_{k=1}^n \cos m\lambda_k = \sum_{k=1}^n \sin m\lambda_k = \sum_{k=1}^n \sin n\lambda_k = 0, \quad m = \overline{1, n-1}.$$

Перейдем к доказательству (2.5). Из (2.3) при $\mu = 1$ имеем

$$(2.6) \quad (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^n X_j = \frac{\prod_{s=1}^n z_s^{n-2}}{\prod_{1 \leq q < s \leq n} (z_q - z_s)^2} = \frac{1}{\prod_{s=1}^n z_s} \prod_{1 \leq q < s \leq n} \frac{z_q z_s}{(z_q - z_s)^2}.$$

Заметим, что последнее произведение вещественно, т.к.

$$\frac{z_q z_s}{(z_q - z_s)^2} = -\frac{1}{4} \operatorname{cosec}^2 \frac{\lambda_q - \lambda_s}{2}, \quad z_q = e^{-i\lambda_q}, \quad z_s = e^{-i\lambda_s}.$$

Поэтому для вещественности (2.6) необходимо условие

$$(2.7) \quad \operatorname{Im} \prod_{s=1}^n z_s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{s=1}^n \lambda_s = 0 \pmod{\pi}, \quad z_s = e^{-i\lambda_s}.$$

В силу (2.7) числитель в (2.3) должен быть вещественным. Значит, при всех k вещественным должен быть знаменатель:

$$(2.8) \quad v_k := z_k^2 \cdot \prod_{s \neq k} (z_k - z_s), \quad \operatorname{Arg} v_k = 0 \pmod{\pi}.$$

Легко вычислить $\operatorname{Arg}(z_k - z_s) = \frac{1}{2}(\pi + \lambda_s + \lambda_k) \pmod{\pi}$, $|z_{k,s}| = 1$. Поэтому аргумент в (2.8) равен с точностью до π сумме

$$2\lambda_k + \frac{1}{2} \sum_{s \neq k} \lambda_s + \frac{n-1}{2} \lambda_k + \frac{n-1}{2} \pi = \frac{1}{2} \sum_{s \neq k} \lambda_s + \frac{n+3}{2} \lambda_k + \frac{n-1}{2} \pi.$$

Теперь будем считать n нечетным. Тогда с учетом предыдущего имеем

$$(2.9) \quad \operatorname{Arg} v_k = \frac{1}{2} \Lambda + \frac{n+2}{2} \lambda_k = 0 \pmod{\pi}, \quad \Lambda := \sum_{s=1}^n \lambda_s,$$

т.е. при всех $k = \overline{1, n}$ необходимо $\Lambda + (n+2)\lambda_k = 0 \pmod{2\pi}$. Рассмотрим удовлетворяющую этому свойству систему

$$(2.10) \quad \Lambda + (n+2)\lambda_k = 4\pi k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Несложно найти явный вид ее решения. Действительно, после сложения всех уравнений имеем: $(2n+2)\Lambda = 2\pi n(n+1)$, откуда $\Lambda = \pi n$. Таким образом, из (2.10) имеем:

$$(2.11) \quad \pi n + (n+2)\lambda_k = 4\pi k, \quad \lambda_k = \frac{\pi(4k-n)}{n+2}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Подставив λ_k в (2.3), найдем $X_k = X_k(1)$. Покажем, что найденные $\{\lambda_k\}$ и $\{X_k\}$ являются решением задачи (1.2). В самом деле, из (2.10) следует (2.9), откуда с учетом (2.11) находим:

$$\operatorname{Arg} v_k = \frac{1}{2} \Lambda + \frac{n+2}{2} \lambda_k = \frac{\pi n}{2} + \frac{n+2}{2} \lambda_k = 0 \pmod{\pi}, \quad \text{т.е.} \quad v_k \in \mathbb{R}.$$

Числители в (2.3) также вещественны, точнее, они равны -1 . Действительно, из (2.11) имеем

$$\prod_{k=1}^n z_k = \exp \left(-i \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) = \exp \left(-i \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n+2} (4k-n) \right) = e^{-i\pi n} = -1$$

Для получения формулы (2.5) остается вычислить

$$|v_k| = \prod_{s \neq k} |e^{-i\lambda_s} - e^{-i\lambda_k}| = 2^{n-1} \prod_{s \neq k} \left| \sin \frac{\lambda_j - \lambda_k}{2} \right|.$$

■

3. СВЕДЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ДИСКРЕТНЫХ МОМЕНТОВ

3.1. **Метод Прони.** Дополним (1.3) до системы

$$(3.1) \quad \begin{cases} X_1 z_1^{-n+1} + X_2 z_2^{-n+1} + \dots + X_n z_n^{-n+1} = \sigma_{1-n} \\ \dots \\ X_1 z_1^{-1} + X_2 z_2^{-1} + \dots + X_n z_n^{-1} = \sigma_{-1} \\ X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sigma_0 = \omega \\ X_1 z_1 + X_2 z_2 + \dots + X_n z_n = \sigma_1 \\ \dots \\ X_1 z_1^n + X_2 z_2^n + \dots + X_n z_n^n = \sigma_n \end{cases}$$

где $z_k \neq 0$ и, возможно, некоторые $X_k = 0$. Для разрешимости задач (1.2), (1.3) при условиях (A) необходима и достаточна разрешимость задачи (3.1) (с каким-либо вещественным ω) при условиях

(B'): $\sigma_0 = \omega$, $\sigma_\mu = \sigma_{-\mu} = 1$, $\sigma_k = 0$ при $k \neq 0, \pm\mu$; все z_k различны и $|z_k| = 1$.

Необходимость очевидна, поскольку добавленные уравнения получаются комплексным сопряжением уравнений (1.3). Достаточность следует из того, что недостающее для (A) условие $X_k \in \mathbb{R}$ является следствием условий (B'). Справедлива

Лемма 1. Для совместной системы (3.1) условие $X_k \in \mathbb{R}$ следует из условий (B').

Доказательство. Пусть для определенности $X_k \neq 0$ при $k = \overline{1, m}$, $m \leq n$, а остальные X_k равны нулю. Заметим, что операция сопряжения к уравнениям с номерами $\overline{n-m+1, n}$ даст уравнения с номерами $\overline{n, n+m-1}$ с заменой X_k на $\overline{X_k}$. Другими словами, уравнения с номерами $\overline{n, n+m-1}$ верны и для X_k , и для $\overline{X_k}$. Вычитая эти уравнения с одинаковыми номерами, получим систему относительно $X_k - \overline{X_k}$ с нулевыми правыми частями и определителем Вандермонда $W(z_1, \dots, z_m)$ с попарно различными z_k . Она имеет нулевое решение. ■

В ряде выкладок мы будем изучать (3.1) без каких-либо предварительных условий на $\{X_k\}$, $\{z_k\}$, $\{\sigma_k\}$, ω . Это классическая система дискретных моментов относительно неизвестных $\{X_k\}$, $\{z_k\}$ при прочих известных параметрах (см. например, [4], [7], [8]). Вместе с (3.1) будем рассматривать систему моментов

$$(3.2) \quad \omega_l = S_l, \quad \text{где} \quad \omega_l := \sum_{k=1}^n Z_k z_k^l, \quad l = \overline{0, 2n-1},$$

относительно Z_k , z_k при известных $S_l = \sigma_{1-n+l}$, ($S_{n-1} = \omega$). В случае, когда $z_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$, система (3.2) получается из (3.1) заменой $Z_k = X_k z_k^{-n+1}$, так что в этом случае системы равносильны. Отметим, что в задаче (3.2) условие $z_k \neq 0$ необязательно.

3.2. **Регулярные системы моментов.** Следуя [9], совместную систему (3.2) и ее решение будем называть *регулярными*, если выполнены условия

(B''): все z_k попарно различны (не обязательно отличны от нуля), а все Z_k отличны от нуля.

Положим $(B) = (B') \cup (B'')$ — совокупность условий (B') и (B''), т.е.

(B): $\sigma_0 = \omega \in \mathbb{R}$, $\sigma_\mu = \sigma_{-\mu} = 1$, $\sigma_k = 0$ при $k \neq 0, \pm\mu$; все z_k попарно различны и $|z_k| = 1$, все Z_k отличны от нуля.

Для краткости совместные системы с указанными свойствами (\mathcal{B}') , (\mathcal{B}'') , (\mathcal{B}) и их решения будем называть (\mathcal{B}') -разрешимыми, (\mathcal{B}'') -регулярными, (\mathcal{B}) -регулярными соответственно.

Для нахождения решения (\mathcal{B}'') -регулярных систем (3.2) обычно пользуются классическим методом Прони [4]. В нашем случае он состоит в следующем. Рассмотрим два определителя

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_1 & Z_2 & \dots & Z_n \\ 0 & Z_1 z_1 & Z_2 z_2 & \dots & Z_n z_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & Z_1 z_1^{n-1} & Z_2 z_2^{n-1} & \dots & Z_n z_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad d_2(z) = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^n \end{vmatrix}.$$

Тогда в силу равенств (3.2) с учетом замены $S_l = \sigma_{1-n+l}$, $S_{n-1} = \sigma_0 = \omega$, имеем

$$(3.3) \quad d_1 \cdot d_2(z) = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & \dots & z^{n-2} & z^{n-1} & z^n \\ \sigma_{1-n} & \sigma_{2-n} & \dots & \dots & \sigma_{-2} & \sigma_{-1} & \omega & \sigma_1 \\ \sigma_{2-n} & \dots & \dots & \sigma_{-2} & \sigma_{-1} & \omega & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{-1} & \omega & \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \dots & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-1} \\ \omega & \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \dots & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-1} & \sigma_n \end{vmatrix}$$

Из условия (\mathcal{B}'') -регулярности системы (3.2) следует, что определитель d_1 отличен от нуля, а $d_2(z)$ обращается в нуль только при $z = z_k$ (определители Вандермонда). Следовательно, искомые числа z_k являются простыми корнями многочлена $G_n(\{\sigma_k\}; z) := d_1 \cdot d_2(z)$. Будем называть

$$G_n(\{\sigma_k\}; z) = g_0 + g_1 z + \dots + g_n z^n, \quad g_k = g_k(\omega),$$

производящим многочленом. Решив уравнение $G_n(\{\sigma_k\}; z) = 0$ относительно z , найдем z_k , а затем, используя первые n уравнений системы (3.2) (с отличным от нуля определителем Вандермонда), по формулам (2.3) определим Z_k .

Вообще говоря, представление (3.3) для $G_n(\{\sigma_k\}; z)$ будем применять без каких-либо предварительных условий на σ_k . В частности, степень G_n может быть меньше n , возможно даже, что $G_n(\{\sigma_k\}; z) \equiv 0$. При выполнении условий (\mathcal{B}') на σ_k вместо $G_n(\{\sigma_k\}; z)$ для определенности будем использовать обозначение $G_n(\omega, \mu; z)$. В этом случае в (3.3) под первой строкой получается трехдиагональная матрица с элементами

$$A_{k, n+2-k} = \omega, \quad A_{k, n+2-k \pm \mu} = 1, \quad k \geq 2$$

(в этих равенствах соответственно $k = \overline{2, n+1}$, $k = \overline{\mu+1, n+1}$, $k = \overline{2, n+1-\mu}$), остальные элементы равны нулю. Например,

$$G_4(\omega, 1; z) = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 & z^4 \\ 0 & 0 & 1 & \omega & 1 \\ 0 & 1 & \omega & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 1 & 0 & 0 \\ \omega & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad G_4(\omega, 2; z) = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 & z^4 \\ 0 & 1 & 0 & \omega & 0 \\ 1 & 0 & \omega & 0 & 1 \\ 0 & \omega & 0 & 1 & 0 \\ \omega & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Приведем известный критерий (\mathcal{B}'') -регулярности систем (3.2).

Теорема Сильвестра-Любича ([7], [9]). Для (\mathcal{B}'') -регулярности системы (3.2) необходимо и достаточно, чтобы степень производящего многочлена $G_n(\{\sigma_k\}; z)$ была равна n , а все его корни z_1, \dots, z_n были попарно различны. Они являются решением системы (3.2). При этом регулярная система имеет единственное решение.

В связи с этой теоремой отметим, что в части необходимости она следует из приведенного метода Прони. Достаточность гарантирует, что если корни производящего многочлена попарно различны, то система (3.2) совместна и притом с отличными от нуля Z_k . Связано это с тем, что если какой-либо $Z_k = 0$ в совместной системе (3.2), то определитель (3.3) равен тождественно нулю (подробнее, см. в п. 5.1).

Лемма 2. В случае (\mathcal{B}'') -регулярной разрешимости задачи (3.2) производящий многочлен, построенный по формуле (3.3), имеет вид

$$(3.4) \quad G_n(\{\sigma_k\}; z) = (-1)^n \prod_{k=1}^n Z_k \cdot \prod_{1 \leq k < j \leq n} (z_k - z_j)^2 \cdot \prod_{k=1}^n (z - z_k)$$

Доказательство. То, что в (3.4) присутствует последнее произведение следует из теоремы Сильвестра-Любича. Хорошо известно (см., например, [10]), что матрица

$$A := \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 & \dots & \omega_{n-1} \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n-1} & \omega_n & \dots & \omega_{2n} \end{pmatrix}, \quad \omega_l := \sum_{k=1}^n Z_k z_k^l,$$

получающаяся из матрицы (3.3) вычеркиванием первой строки и последнего столбца представляется в виде произведения матрицы Вандермода, диагональной матрицы и транспонированной матрицы Вандермода:

$$A = W \cdot \text{diag}(Z_1, \dots, Z_n) \cdot W^T, \quad W := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ z_1 & \dots & z_n \\ \dots & \dots & \dots \\ z_1^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

То есть алгебраическое дополнение определителя (3.3) к z^n (старший коэффициент многочлена $G_n(\{\sigma_k\}; z)$) равно $(-1)^n (\det W)^2 \prod_{k=1}^n Z_k$. ■

4. О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРОИЗВОДЯЩЕГО МНОГОЧЛЕНА

4.1. Докажем простое утверждение.

Лемма 3. Пусть $G_n(\{\sigma_k\}; z)$ — вещественный многочлен степени n , корни которого лежат на единичной окружности (симметрично относительно действительной оси). Тогда коэффициенты этого многочлена симметричны или антисимметричны, т.е. с одним из знаков \pm имеем:

$$(4.1) \quad g_k = \pm g_{n-k}, \quad g_k = g_k(\omega), \quad k = \overline{0, n}.$$

Доказательство. В самом деле, поскольку все $|z_k| = 1$, то $g_n = \pm g_0$ (теорема Виета для вещественных коэффициентов). Далее, при $|z| = 1$ имеем

$$\overline{G_n(\{\sigma_k\}; z)} = G_n(\{\sigma_k\}; \bar{z}) = G_n(\{\sigma_k\}; z^{-1}) = z^{-n} G(z),$$

где G — многочлен с коэффициентами $\tilde{g}_k = g_{n-k}$, расположенными в обратном порядке. Следовательно, многочлены G и G_n имеют одинаковые корни, а их старшие коэффициенты могут отличаться только знаком. Отсюда получается (4.1) ■

Пример 2. В некоторых случаях условие симметрии коэффициентов сразу приводит к решению задачи (1.2). Пусть $n = 4$, $\mu = 2$. Тогда

$$G_4(\omega, 2; z) = (1 - \omega^2) \cdot ((1 - \omega^2)z^4 + \omega z^2 - 1).$$

Из условия $g_0(\omega) = g_4(\omega)$ находим $\omega = \sqrt{2}$. Подставив это значение в G_4 , найдем корни, а затем по формулам (2.3) — амплитуды:

$$z_k = e^{-i\lambda_k} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \pm \frac{i}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad X_1 = \dots = X_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Отсюда находим регулярное решение $\{\lambda_k\} = \{\pm 3\pi/8, \pm 5\pi/8\}$ задачи (1.2) и АФО H_4 . Аналогично при $n = 6$, $\mu = 2$ условие $g_0(\omega) = g_6(\omega)$ приводит к значению $\omega = (\sqrt{5} - 1)/2$ и нужному АФО H_6 .

4.2. Рекуррентные формулы для коэффициентов многочлена $G_n(\omega, \mu; \cdot)$. Заметим, что при условиях (B') на σ_k строки T_j определителя (3.3) с номерами $j = 2, \dots, n + 1$ имеют вид

$$(4.2) \quad T_j = (\sigma_{n-j+1}, \dots, \sigma_\mu, \dots, \sigma_1, \omega, \sigma_1, \dots, \sigma_\mu, \dots, \sigma_{j-1}),$$

где $\sigma_\mu = 1$, все $\sigma_k = 0$ с номерами $k \neq 0, \mu$, а $\sigma_0 = \omega$ — вещественный вспомогательный параметр (некоторые σ_k могут выходить за пределы строк и тогда эти элементы отбрасываются).

Запишем коэффициенты многочлена $G_n(\omega, \mu; \cdot)$ в виде строки

$$\mathcal{G} := (g_0, g_1, \dots, g_n).$$

Хорошо известна следующая обобщенная формула Ньютона: скалярное произведение $(T_j \cdot \mathcal{G}) = 0$ (здесь она получается как сумма произведений алгебраических дополнений к элементам первой строки определителя (3.3) на соответствующие элементы другой строки).

Далее, считая для удобства, что $g_k = 0$ с номерами $k < 0$ и $k > n$ перепишем это условие в развернутом виде:

$$g_{k-\mu} + g_k \cdot \omega + g_{k+\mu} = 0, \quad k = \overline{0, n-1},$$

откуда видим, что эта система распадается на μ независимых подсистем

$$(4.3) \quad g_{q+\mu k} + \omega g_{q+\mu(k-1)} + g_{q+\mu(k-2)} = 0, \quad q = \overline{0, \mu-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Введем рекуррентно вспомогательные многочлены $r_s(\omega)$:

$$(4.4) \quad r_{-1} = 0, \quad r_0 = 1, \quad r_k(\omega) + \omega r_{k-1}(\omega) + r_{k-2}(\omega) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

С учетом равенств (4.3), (4.4) получается

Лемма 4. Коэффициенты производящего многочлена $G_n(\omega, \mu; \cdot)$ при условиях (B') на σ_k линейно выражаются через $g_0, \dots, g_{\mu-1}$ и имеют вид

$$(4.5) \quad g_{q+\mu k} = g_q r_k, \quad q = \overline{0, \mu-1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (q + \mu k \leq n).$$

Хорошо известно [11], что равенствами (4.4) при $\omega = -2x$ определяются многочлены Чебышева U_k второго рода. Точнее,

$$(4.6) \quad U_k(x) := \frac{\sin((k+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = r_k(-2x); \quad r_k(\omega) = U_k\left(-\frac{\omega}{2}\right).$$

Явный вид таких многочленов [11]:

$$(4.7) \quad r_k(\omega) = (-1)^k \sum_{j=0}^{k/2} (-1)^j C_{k-j}^j \omega^{k-2j}.$$

Отсюда видно, что

$$(4.8) \quad r_k(\omega) = (-1)^k r_k(-\omega), \quad r_k(\omega) = (-1)^k U_k(\omega/2).$$

Кроме того, из (4.6) следует, что многочлены r_k образуют ортонормированную систему в $L_2([-2, 2])$ с весом $(2\pi)^{-1}\sqrt{4-\omega^2}$.

Приведем одно необходимое условие регулярной разрешимости задачи (1.2) в терминах r_k . Пусть

$$s = [n/\mu], \quad n - \mu < \mu s \leq n$$

и предположим, что число $n - \mu s$ четное. При $q = (n - \mu s)/2$ соответствующая последовательность (4.5) содержит два коэффициента с симметричными номерами g_q и g_{n-q} . Отсюда и из (4.1), (4.5), (4.6) получается

Теорема 1. *В случае четного $n - \mu s$ для (\mathcal{B}) -регулярной разрешимости системы (3.1) необходимо одно из равенств*

$$(4.9) \quad U_s(\omega/2) = \pm 1.$$

Пример 3. Пусть $n = 8$, $\mu = 2$. В этом случае $s = 4$. Выпишем уравнение (4.9) со знаком "+" и его корни:

$$\omega^4 - 3\omega^2 = 0; \quad \{0, 0, \pm\sqrt{3}\}.$$

Непосредственной подстановкой каждого из этих корней в $G_8(\omega, 2; z)$ убеждаемся, что условия (\mathcal{B}) по отношению к корням многочлена G_8 выполняются. Например, при подстановке $\omega = 0$ получаем $G_8(0, 2; z) = z^8 - z^4 + 1$ с корнями $\{z_k\} = \{e^{-i\lambda_k}\} = \sqrt[4]{\exp(\pm i\pi/3)}$. Значит, задача (1.2) во всех трех случаях имеет регулярные вещественные решения $\{X_k\}$ (см. лемму 1), которые находятся из (2.3).

В дальнейшем важную роль играет многочлен

$$(4.10) \quad \mathcal{R}_{s-1}(\omega; t) := r_0(\omega) + r_1(\omega)t + \dots + r_{s-1}(\omega)t^{s-1}, \quad r_0(\omega) \equiv 1, \quad s \in \mathbb{N}.$$

4.3. О корнях многочлена \mathcal{R}_{s-1} . Справедлива

Лемма 5. *Все корни t_k многочлена \mathcal{R}_{s-1} , $s \geq 2$, различны и лежат на единичной окружности в том и только том случае, когда ω является корнем многочлена $r_s(\omega) = (-1)^s U_s(\omega/2)$, т.е.*

$$(4.11) \quad \omega \in \Omega_s := \left\{ 2 \cos \varphi_\alpha : \varphi_\alpha = \frac{\pi\alpha}{s+1}, \quad \alpha = \overline{1, s} \right\}.$$

При $\omega = -2 \cos \varphi_\alpha = 2 \cos \varphi_{s-\alpha+1}$ корни t_k составляют множество

$$(4.12) \quad \{t_k\} = \{ \sqrt[s+1]{(-1)^\alpha} \} \setminus \{e^{i\varphi_\alpha}, e^{-i\varphi_\alpha}\}.$$

Доказательство. При $x = -\omega/2$, $\varphi = \arccos x$ из (4.6) имеем

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1-x^2} \mathcal{R}_{s-1}(\omega; t) &= \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^{s-1} t^s U_k(x) = \sum_{k=0}^{s-1} t^s \sin((k+1)\varphi) = \\
 &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{s-1} t^s (e^{i(k+1)\varphi} - e^{-i(k+1)\varphi}) = \frac{1}{2i} \left(e^{i\varphi} \frac{1-t^s e^{is\varphi}}{1-te^{i\varphi}} - e^{-i\varphi} \frac{1-t^s e^{-is\varphi}}{1-te^{-i\varphi}} \right) = \\
 (4.13) \quad &= \frac{t^{s+1} \sin(s\varphi) - t^s \sin((s+1)\varphi) + \sin(\varphi)}{t^2 - 2t \cos \varphi + 1} =: P(t).
 \end{aligned}$$

Для того, чтобы многочлен в числителе последней дроби имел различные корни t_k с $|t_k| = 1$ по лемме 3 необходимо (а в данном случае и достаточно) чтобы

$$\sin(s+1)\varphi = 0 \text{ и } \sin s\varphi = \sin \varphi \quad \text{или} \quad \sin(s+1)\varphi = 0 \text{ и } \sin s\varphi = -\sin \varphi.$$

Решив эти две системы уравнений, получим (первой и второй системам соответствуют следующие первое и второе равенства):

$$(4.14) \quad \cos \frac{s+1}{2}\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \sin \frac{s+1}{2}\varphi = 0, \quad P(t) = A \cdot \frac{t^{s+1} \pm 1}{t^2 - 2t \cos \varphi + 1}.$$

Здесь $A = \sin(s\varphi) \neq 0$. Отсюда получается (4.11). Исключив из множества корней числителя в P нули знаменателя, получим (4.12). ■

Отметим, что из ортогональности многочленов r_k , в частности, следует, что (вещественные) корни многочленов r_{s-1} и r_s все различны [11], так что $\deg \mathcal{R}_{s-1}(\omega; t) = s-1$ при любых ω , лежащих в достаточно малой окрестности множества Ω_s . Из сказанного получается

Лемма 6. Пусть $\omega_0 \in \Omega_s$. Тогда при достаточно малых $|\varepsilon|$ многочлен $\mathcal{R}_{s-1}(\omega_0 + \varepsilon; t)$ имеет ровно $s-1$ различных корней и при $|\varepsilon| \rightarrow 0$ они стремятся к корням многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega_0; t)$.

4.4. О факторизации производящего многочлена при условиях (\mathcal{B}') на σ_k . Рассмотрим случай $n = \mu s - 1$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$. Из (4.5) получается

$$(4.15) \quad G_{\mu s-1}(\omega, \mu; z) = (g_0 + g_1 z + \dots + g_{\mu-1} z^{\mu-1}) \cdot \mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu).$$

Покажем, что первый сомножитель может содержать лишь одно отличное от нуля слагаемое $g_{\mu-1} z^{\mu-1}$. Справедлива

Лемма 7. Коэффициенты $g_{m+k\mu}$, $k \in \mathbb{N}$, производящего многочлена $G_n(\omega, \mu; z)$ в случае $n = \mu s - 1$ равны нулю при $m = \overline{0, \mu - 2}$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу, получающуюся удалением первой строки из матрицы в (3.3). Покажем, что ее столбцы $a_{k\mu}$ с номерами $k\mu$, $k = \overline{1, s}$, линейно зависимы. Отсюда и будет следовать утверждение леммы. Действительно, запишем равную нулю линейную комбинацию $\sum x_{k\mu} a_{k\mu} = 0$ в развернутом виде (ср. с (4.3), где $q = \mu$):

$$x_{(k+1)\mu} + \omega x_{k\mu} + x_{(k-1)\mu} = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_\mu = 1, \quad k = \overline{1, s-1}.$$

Таким образом нетривиальная нулевая комбинация получается с коэффициентами $x_{k\mu}$, определяемыми рекуррентно. ■

Отсюда и из леммы 4 получается

Теорема 2. Пусть $n = \mu s - 1$, $\mu \geq 1$, $s \geq 2$. При условиях (\mathcal{B}') на σ_k коэффициенты производящего многочлена $G_n(\omega, \mu; z)$ имеют вид

$$(4.16) \quad g_{\mu k-1} = g_{\mu-1} r_{k-1}, \quad k = \overline{1, s},$$

остальные коэффициенты равны нулю и (4.15) принимает вид

$$(4.17) \quad G_n(\omega, \mu; z) = g_{\mu-1}(\omega) z^{\mu-1} \cdot \mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu).$$

Отметим, что $g_{\mu-1}(\omega)$ — многочлен степени n , не равный тождественно нулю. Действительно, при $\omega \rightarrow \infty$ старшее слагаемое определителя $G_n(\omega, \mu; z)$ имеет вид $\omega^n(1 + o(1))z^n$. Из (4.17), в частности, следует, что при $\mu \geq 2$ все решения задач (1.2) и (1.3) не являются регулярными (если они существуют).

Приведем следствие, дополняющее пример 1.

Теорема 3. При $n \geq 2$ и $\mu = 1$ для регулярной разрешимости задачи (3.1) (а значит, и (1.2)) необходимо и достаточно условие $\omega \in \Omega_s$ при $s = n + 1$. При $\omega = -2 \cos \varphi_\alpha$ решение z_k ($k = \overline{1, n}$) системы (1.3) составляет множество (4.12) (с $s = n + 1$) и

$$X_k = -\frac{\operatorname{sgn}(\sin(n+1)\varphi_\alpha)}{n+2} \cdot \frac{z_k^2 - 2z_k \cos \varphi_\alpha + 1}{z_k^{n+3}}, \quad \varphi_\alpha = \frac{\pi}{n+2}\alpha, \quad \alpha = \overline{1, n+1}.$$

Доказательство. Действительно, при $\mu = 1$ и условиях (\mathcal{B}') найдем алгебраическое дополнение к z^0 в (3.3). Его разложение по последней строке, содержащей единственный ненулевой элемент $\sigma_1 = 1$ в левом нижнем углу, дает определитель той же структуры, имеющий на единицу меньший размер. Далее все повторяется и по индукции находим $g_0 = (-1)^{n+1} \neq 0$. Значит, из (4.17) имеем $G_n(\omega, 1; z) = (-1)^{n+1} \mathcal{R}_n(\omega; z)$, так что все корни производящего многочлена при $\omega \in \Omega_{n+1}$ различны и лежат на единичной окружности. Поэтому первая часть следствия получается из теоремы Сильвестра-Любича.

Значения X_k получаются из (2.3), если учесть, что знаменатель выражения (2.3) равен $(-1)^{n-1} z_k^2 \mathcal{P}'(z_k)$, где $\mathcal{P} = P/A$ — многочлен, определенный в (4.14). ■

5. РАЗРЕШИМАЯ ЗАДАЧА В НЕРЕГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ

5.1. Регуляризация. Первый способ. В ряде случаев система (3.1) может быть разрешимой, но не (\mathcal{B}'') -регулярной (т.е. некоторые X_k равны нулю и все $z_k \neq 0$). В таких случаях, сделав замену переменных как в (3.2), ее можно переписать в виде переопределенной совместной системы моментов с $m < n$:

$$(5.1) \quad \sum_{k=1}^m Z_k z_k^l = S_l, \quad l = \overline{0, 2n-1}, \quad Z_k = X_k z_k^{-n+1}, \quad S_l = \sigma_{1-n+l},$$

где все Z_k отличны от нуля, а z_k попарно различны (в противном случае чисто неизвестных в (5.1) будет меньше m). Отметим, что решение совместной системы (5.1) единственно. Действительно, достаточно взять подсистему уравнений с номерами $l = \overline{0, 2m-1}$ и воспользоваться теоремой Сильвестра-Любича.

Итак, пусть система (5.1) совместна при $m < n$. В этом случае производящий многочлен $G_n(\{\sigma_k\}; z)$, построенный по формуле (3.3) (без каких-либо условий на σ_k), тождественно равен нулю. Это следует из леммы 2. Действительно, достаточно дополнить систему (5.1) до регулярной добавлением к ее обеим частям

слагаемых с малыми $Z_k = \varepsilon$:

$$\sum_{k=1}^m Z_k z_k^l + \varepsilon \sum_{k=m+1}^n z_k^l \equiv \xi_l(\varepsilon); \quad \xi_l(\varepsilon) = S_l + O(\varepsilon), \quad (37)$$

где все z_k различны и фиксированы. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ коэффициенты соответствующего производящего многочлена в силу (3.4) стремятся к нулю, они же в силу формулы (3.3) при $\xi_l(\varepsilon) \rightarrow S_l$ стремятся и к коэффициентам многочлена G_n . Отсюда получается нужное.

Далее, при малых $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_k \in (0, \varepsilon)$ дополним систему (5.1) до регулярной добавлением к ее обеим частям степенных слагаемых:

$$(5.2) \quad \sum_{k=1}^m Z_k z_k^l + \sum_{k=1}^{n-m} \varepsilon_k^l \equiv \xi_l; \quad \xi_l = \xi_l(\{\varepsilon_k\}) = S_l + O(\varepsilon),$$

где все z_k и ε_k попарно различны и отличны от нуля. Для этой системы также построим производящий многочлен (см. (3.4))

$$(5.3) \quad G_n(\{\xi_k\}; z) = (-1)^n K(\{\varepsilon_k\}) \cdot \prod_{k=1}^m Z_k \cdot \prod_{k < j} (z_k - z_j)^2 \cdot \prod_{k=1}^m (z - z_k) \cdot \prod_{k=1}^{n-m} (z - \varepsilon_k),$$

где

$$(5.4) \quad K(\{\varepsilon_k\}) = \prod_{k < j} (\varepsilon_k - \varepsilon_j)^2 \cdot \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{n-m} (z_k - \varepsilon_j)^2.$$

Положим

$$(5.5) \quad \begin{aligned} G_n^*(z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G_n(\{\xi_k\}; z)}{\prod_{k < j} (\varepsilon_k - \varepsilon_j)^2} = \\ &= (-1)^n \prod_{k=1}^m Z_k \cdot \prod_{k < j} (z_k - z_j)^2 \cdot \prod_{k=1}^m z_k^{2(n-m)} \cdot z^{n-m} \prod_{k=1}^m (z - z_k). \end{aligned}$$

Будем называть $G_n^*(z)$ *нерегулярным производящим многочленом*. Итак, справедлива

Теорема 4. *Если переопределенная система (36) совместна (при отличных от нуля z_k), то необходимо $G_n(\{\sigma_k\}; z) \equiv 0$, кроме того, z_k являются ненулевыми корнями нерегулярного производящего многочлена $G_n^*(z)$.*

Отсюда получается следующий

Алгоритм решения нерегулярных совместных систем (5.1) с отличными от нуля z_k . Надо заменить S_l на $S_l + \sum_{k=1}^s \varepsilon_k^l$, где s — наименьшее натуральное число, при котором соответствующий производящий многочлен отличен от тождественного нуля. Затем, вычислив предел (5.5), найти нерегулярный производящий многочлен $G_n^*(z)$ и его ненулевые корни z_k .

5.2. Регуляризация. Второй способ. Приведем некоторые условия (\mathcal{B}') -разрешимости переопределенной системы (5.1) (а значит, для допустимого решения задачи (1.2)) в случае $n = s\mu - 1$.

Теорема 5. *При $n = s\mu - 1$ для (\mathcal{B}') -разрешимости переопределенной системы (5.1) необходимо $r_s(\omega) = 0$.*

Доказательство следует непосредственно из леммы 5 и теорем 2 и 4. По-видимому это необходимое условие является и достаточным. Мы докажем это в случае $\mu = 2$.

Лемма 8. В условиях теоремы 2 имеем $g_{\mu-1}(\omega) = (-1)^{s+1}r_s(\omega)$ при $\mu = 2$, т.е.

$$(5.6) \quad G_n(\omega, 2; z) = (-1)^{s+1}r_s(\omega) \cdot z \cdot \mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^2), \quad n = 2s - 1.$$

Доказательство. Минор M_n (размера $n \times n$, $n = 2s - 1$), дополнительный к z^1 в (3.3), имеет структуру, позволяющую упростить его путем определенного «прореживания».

На шаге $k = 1$ строка минора M_n с номером $n - 1$ содержит единственный ненулевой элемент с номером $(n - 1, 3)$, равный единице. Через M_{n-1} обозначим дополнительный к ней минор (размера $(n - 1) \times (n - 1)$). Далее выполняются сходные операции. На шаге $k \geq 2$ строка $(n - 2k + 1)$ минора M_{n-k+1} содержит единственный ненулевой элемент с номером $(n - 2k + 1, 2 + k)$, равный единице. Через M_{n-k} обозначим дополнительный к ней минор. На последнем шаге $k = s - 1$ строка минора M_{s+1} с номером 2 содержит единственный ненулевой элемент с номером $(2, s + 1)$, равный единице. Через M_s обозначим дополнительный к ней минор. Учтем знаки, с которыми берутся миноры в указанном разложении и, просуммировав номера $1 + \sum_{k=1}^{s-1}((n - 2k + 1) + (2 + k))$, получим $g_1(\omega) = -(-1)^{s(s-1)/2}M_s$.

Заметим, что полученный определитель M_s зеркально симметричен к трехдиагональному определителю J_s Якоби с постоянными элементами ω на главной диагонали и единицами на двух прилегающих диагоналях (т.е. элементы $\alpha_{k,l}$ определителя J_s имеют вид $\alpha_{k,k} = \omega$, $\alpha_{k,k+1} = 1$, $\alpha_{k-1,k} = 1$, остальные элементы нулевые). Очевидно, $M_s = (-1)^{s(s-1)/2}J_s$. Для J_k хорошо известна рекуррентная формула (см., напр., [12])

$$J_k = \omega J_{k-1} - J_{k-2}, \quad J_{-1} = 0, \quad J_0 = 1, \quad k = \overline{1, s}.$$

Учитывая (4.4), (4.7), видим, что $J_s(\omega) = r_s(-\omega) = (-1)^s r_s(\omega)$. ■

Теорема 6. При $\mu = 2$, $n = s\mu - 1$ ($s \geq 2$) для (\mathcal{B}') -разрешимости системы (5.1) необходимо и достаточно условие $r_s(\omega) = 0$ (т.е. $\omega \in \Omega_s$). При этом $m = n - 1$, а решение $\{z_k\}$ состоит из корней многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^2)$.

Доказательство. Необходимость условия $r_s(\omega) = 0$ вытекает из леммы 8 и теоремы 5. Докажем достаточность. Пусть ω — корень многочлена r_s , тогда $r_{s-1}(\omega) \neq 0$ (учитываем ортогональность многочленов) и из (4.4) получаем

$$(5.7) \quad \omega = -r_{s-2}(\omega)/r_{s-1}(\omega), \quad r_{s-1}(\omega) \neq 0.$$

Рассмотрим варьированную задачу (3.2), заменив ω на $\omega + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В силу (5.7) и леммы 6 при $\varepsilon \rightarrow 0$ корни многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega + \varepsilon; z^2)$ стремятся к корням z_j ($j = \overline{2, 2s - 1}$) многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^2)$. Корни z_j попарно различны и лежат на единичной окружности (они составляют множество (4.12), где следует заменить t_k на t_k^2). Поэтому многочлен $G_n(\omega + \varepsilon, 2; z)$ при достаточно малых ε имеет $n = 2s - 1$ различных корней $\xi_k(\varepsilon)$ ($k = \overline{1, n}$), один из которых, пусть ξ_1 , равен нулю и, как уже сказано, $\xi_k(\varepsilon) \rightarrow z_k$ ($k = \overline{2, n}$) при $\varepsilon \rightarrow 0$. В частности, из (4.12) следует, что $|\xi_k(\varepsilon) - \xi_m(\varepsilon)| \geq \text{const} > 0$, $k \neq m$, при достаточно малых ε .

Следовательно, получается (\mathcal{B}'') -регулярная система (3.2). Совершая предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, видим, что $Z_k(\varepsilon) \rightarrow Z_k = Z_k(0)$ с некоторыми

конечными $Z_k(0)$, поскольку определитель первых n уравнений системы (3.2) отделен от нуля и стремится к отличной от нуля константе.

Остается показать, что $Z_1 = 0$. Воспользуемся формулой (2.3). Тогда $Z_1 = (\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{S})$, где $\mathcal{S} = (S_0, \dots, S_{n-1})$ и $S_{n-1} = \omega + \varepsilon$, $S_{n-3} = 1$ (остальные равны нулю). Положим

$$\rho_2^{(1)}(\{\xi_k\}) = \sum_{2 \leq j_1 < j_2 \leq n} \xi_{j_1} \xi_{j_2}, \quad \rho_2^{(1)}(\{z_k\}) = \sum_{2 \leq j_1 < j_2 \leq n} z_{j_1} z_{j_2}.$$

Из (5.7) имеем $\rho_2^{(1)}(\{z_k\}) = -\omega$, откуда с учетом (2.3) находим

$$Z_1(\varepsilon) = \frac{\rho_2^{(1)}(\{\xi_k\}) + (\omega + \varepsilon)}{\prod_{k=2}^n (\xi_1 - \xi_k)} = \frac{\varepsilon + (\rho_2^{(1)}(\{\xi_k\}) - \rho_2^{(1)}(\{z_k\}))}{\prod_{k=2}^n (\xi_1 - \xi_k)} \rightarrow 0.$$

Итак, варьированная система (3.2) в пределе дает (\mathcal{B}') -разрешимую систему (5.1) с $m = n - 1$. ■

5.3. Регуляризация. Третий способ. Как и в предыдущем пункте, рассматриваем случай $n = s\mu - 1$. Пусть система (3.2) совместна с некоторым $m < n$ и удовлетворяет условию (\mathcal{B}') . Из теоремы 2 следует, что в случае $n = s\mu - 1$ при $s \geq 2$ и $\mu \geq 2$ система (3.2) всегда нерегулярна. Проведем ее регуляризацию, заменив $S_{2n-1} = \sigma_n = 0$ на $\sigma_n = \varepsilon$ с некоторым параметром $\varepsilon \in \mathbb{C}$ (остальные параметры не изменяются). В определителе (3.3) при этом изменится только один элемент в правом нижнем углу. Учитывая (4.17) и то, что новый производящий многочлен $\hat{G}(\varepsilon, \omega, \mu; z)$ зависит от ε линейно, получим

$$(5.8) \quad \hat{G}(\varepsilon, \omega, \mu; z) = \varepsilon \mathcal{T}(\omega, \mu; z) + g_{\mu-1}(\omega) z^{\mu-1} \cdot \mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu).$$

Найдем явный вид многочлена \mathcal{T} .

Лемма 9. Верна формула:

$$(5.9) \quad \mathcal{T}(\omega, \mu; z) = A(\omega) z^{(s-1)\mu} \mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^{-\mu}),$$

где $A(\omega)$ — некоторый многочлен степени $n - 1$, отличный от тождественного нуля. В частности, при $A(\omega) \neq 0$ многочлен \mathcal{T} имеет корни, обратные по отношению к корням многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$.

Доказательство. Многочлен \mathcal{T} является алгебраическим дополнением в определителе (3.3) к элементу, находящемуся в правом нижнем углу. Его матрицу обозначим через $B = (b_{j,k})$ ($k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$). Построим далее матрицу $A = (a_{j,k})$, у которой столбцы и строки зеркально симметричны (т.е. расположены в обратном порядке) по отношению к столбцам и строкам матрицы B (поворот матрицы B на 180° ; точнее, $a_{j,k} = b_{n+1-j, n+1-k}$). Заметим, что если перенести последнюю строку (со степенями z^j) матрицы A на первое место и формально заменить в ней z^k на z^{n-1-k} ($k = \overline{0, n-1}$), то получится матрица той же структуры, что в (3.3), но на единицу меньшего размера (при условии (\mathcal{B}') на σ_k). Это означает, что $\det A = (-1)^{n-1} z^{n-1} G_{n-1}(\omega, \mu; 1/z)$.

Как и в лемме 7 доказывается, что коэффициенты $\tilde{g}_{m+k\mu}$ многочлена $G_{n-1}(\omega, \mu; \xi)$, $\xi = 1/z$, равны нулю при $m = \overline{0, \mu-3}$, $k \in \mathbb{N}$. (В этом случае линейно зависимы столбцы с номерами $k\mu - 1$, $k = \overline{1, s}$.) Отсюда и из равенств (4.5) аналогично (4.17) получаем $\tilde{g}_{\mu k-2} = \tilde{g}_{\mu-2} r_{k-1}$ при $k = \overline{1, s}$ и

$$\det A = (-1)^{n-1} \xi^{1-n} G_{n-1}(\omega, \mu; \xi) = (-1)^{n-1} \tilde{g}_{\mu-2} \xi^{1-n} \xi^{\mu-2} \cdot \mathcal{R}_{s-1}(\omega; \xi^\mu),$$

где $\tilde{g}_{\mu-2}(\omega)$ — многочлен, не равный тождественно нулю (поскольку при $\omega \rightarrow \infty$ старшее слагаемое в $G_{n-1}(\omega, \mu; \xi)$ имеет вид $\pm \omega^{n-1}(1+o(1))\xi^{n-1}$). Учитывая, что \mathcal{T} отличается от $\det A$ только знаком, получаем нужное. ■

В следующей теореме можно считать, что $\mu \geq 3$, поскольку при $\mu = 1, 2$ полное решение задачи (1.2) дано в теоремах 3 и 6.

Теорема 7. Пусть $n = s\mu - 1$ ($s \geq 2$, $\mu \geq 2$) и $\omega \in \Omega_s$. Тогда система (5.1) с исключенным последним уравнением имеет допустимое решение, причем $m = n - (\mu - 1)$. Различные корни z_k , $k = \overline{1, m}$, являются нулями многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$ и при $\omega = -2 \cos \varphi_\alpha = 2 \cos \varphi_{s-\alpha+1}$ составляют множество

$$(5.10) \quad \{z_k\} = \{ \sqrt[s+1]{(-1)^\alpha} \} \setminus \{ \sqrt[\mu]{e^{i\varphi_\alpha}}, \sqrt[\mu]{e^{-i\varphi_\alpha}} \}, \quad \varphi_\alpha = \frac{\pi\alpha}{s+1}, \quad \alpha = \overline{1, s}.$$

При этом

$$(5.11) \quad Z_k = -\frac{\sum_{j \neq k} z_j}{\prod_{j \neq k} (z_k - z_j)} = \frac{z_k}{\prod_{j \neq k} (z_k - z_j)}, \quad k = \overline{1, m}.$$

В этом случае допустимое решение (с условием (A)) имеет вид

$$X_k = Z_k z_k^{n-1}, \quad e^{-i\lambda_k} = z_k, \quad k = \overline{1, m},$$

а соответствующий АФО имеет порядок $m = n - (\mu - 1)$ и решает задачу (1.2) на многочленах порядка $n - 1$.

Примечание 4. Аналогично примечанию 3 отметим, что в силу равенства $z_k^\tau = (-1)^\alpha$, $\tau := (s+1)\mu = n + \mu + 1$, нулевые степенные суммы $\sum_k X_k z_k^\beta$ в (1.3) порядка β остаются нулевыми при замене β на $\beta + \tau k$, $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, отличными от нуля могут быть лишь степенные суммы порядка

$$(5.12) \quad \beta = \mu + \tau k \quad \text{и} \quad n + \tau k \leq \beta \leq \tau + \tau k, \quad \tau = n + \mu + 1.$$

Поэтому формула (1.2) при $\mu \geq 2$ верна и для сходящихся тригонометрических рядов, в которых отсутствуют гармоники с номерами (5.12).

Доказательство. Пусть $\omega \in \Omega_s$. Тогда $r_s(\omega) = 0$, $r_{s-1}(\omega) \neq 0$ (учитывая ортогональность многочленов). Выберем последовательность $\{\omega_k\}$, $\omega_k \rightarrow \omega$ так, чтобы $g_{\mu-1}(\omega_k) \neq 0$, $A(\omega_k) \neq 0$, $r_{s-1}(\omega_k) \neq 0$. По лемме 6 корни многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega_k; z^\mu)$ сходятся к корням многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$ (попарно различным и лежащим на единичной окружности симметрично относительно действительной оси, см. (4.12)). Из (5.9) следует, что корни многочлена $\mathcal{T}(\omega, \mu; z)$ также сходятся к корням многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$. Далее, положим $\alpha_k = g_{\mu-1}(\omega_k) r_{s-1}(\omega_k)$, $N_k(z) = \mathcal{R}_{s-1}(\omega_k; z^\mu) / r_{s-1}(\omega_k)$, так что (см. (5.8))

$$\hat{G}_k(z) := \hat{G}(\varepsilon_k, \omega_k, \mu; z) = \varepsilon_k \mathcal{T}(\omega_k, \mu; z) + \alpha_k z^{\mu-1} \cdot N_k(z),$$

причем параметр ε_k выберем из условия:

$$\varepsilon_k \mathcal{T}(\omega_k, \mu; z) = -2^{-1} \alpha_k M_k(z),$$

где M_k — унитарные многочлены (с единичными старшими коэффициентами) степени $\mu(s-1)$. Тогда

$$(5.13) \quad \hat{G}_k(z) = \alpha_k (z^{\mu-1} - 2^{-1}) N_k(z) + \alpha_k 2^{-1} (N_k(z) - M_k(z)),$$

где, как уже сказано, M_k , N_k — унитарные многочлены степени $\mu(s-1)$, корни которых при $k \rightarrow \infty$ сходятся к корням многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$.

Поскольку α_k ограничены, то, очевидно, $\alpha_k(N_k(z) - M_k(z))$ равномерно стремится к нулю на любом компактном множестве. Поэтому по теореме Руше многочлены \hat{G}_k при достаточно больших $k \geq k_0$ имеют $n = s\mu - 1$ различных корней, которые сходятся к $\sqrt[\mu]{1/2}$ и корням многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$. Пусть для определенности корни $z_1^{(k)}, \dots, z_{\mu-1}^{(k)}$ сходятся к $\sqrt[\mu]{1/2}$, а остальные корни $z_\mu^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}$ сходятся к корням z_μ, \dots, z_n многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$.

Получается последовательность (\mathcal{B}'') -регулярных систем (3.2) с производящими многочленами \hat{G}_k и решениями $\{Z_j^{(k)}\}, \{z_j^{(k)}\}$. Покажем, что $Z_j^{(k)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для номеров $j = \overline{1, \mu-1}$. Действительно, возьмем, к примеру, $j = 1$. Первые n уравнений варьированной системы (3.2) имеют вид (1.3) с условиями (\mathcal{B}') , где в соответствии с нумерацией уравнений (3.2) следует заменить μ на $n - \mu$. По формуле (2.3) получаем

$$Z_1^{(k)} = \frac{\omega_k + (-1)^\mu \rho_\mu(z_2^{(k)}, \dots, z_n^{(k)})}{\prod_{j=2}^n (z_1^{(k)} - z_j^{(k)})} = \frac{b_k + a_k}{\prod_{j=2}^n (z_1^{(k)} - z_j^{(k)})},$$

где

$$b_k = \omega + (-1)^\mu \rho_\mu(z_\mu^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}),$$

$$a_k := (\omega_k - \omega) + (-1)^\mu \sum_{m=1}^{\mu-2} \rho_m(z_2^{(k)}, \dots, z_{\mu-1}^{(k)}) \rho_{\mu-m}(z_\mu^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}).$$

При $\mu = 2$ последняя сумма считается равной нулю. По теореме Виета для многочлена $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$ имеем (см. (5.7))

$$\omega + (-1)^\mu \rho_\mu(z_\mu, \dots, z_n) = 0, \quad \rho_{\mu-m}(z_\mu, \dots, z_n) = 0, \quad m = \overline{1, \mu-2}.$$

Поэтому, учитывая, что $z_j^{(k)} \rightarrow z_j$ и $|z_1^{(k)} - z_j^{(k)}| \geq \text{const} > 0$, $j \neq 1$, получаем $b_k \rightarrow 0$, $a_k \rightarrow 0$, $Z_1^{(k)} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

По тем же формулам (2.3) получается и сходимости $Z_j^{(k)}$ к некоторым конечным $Z_{j+1-\mu}$, $j = \overline{\mu, n}$ (индексы изменены для удобства). Для определения Z_j остается решить первые $m = n - (\mu - 1)$ уравнений предельной системы вида (5.1). Она имеет вид (1.3), где столбец сводных членов содержит единственный ненулевой элемент (равный единице), находящийся на предпоследнем месте с номером $m - 1$. По формуле (2.3) получается первое равенство в (5.11), а во втором учитывается равенство $\sum_{j=1}^m z_j = 0$ (многочлен $\mathcal{R}_{s-1}(\omega; z^\mu)$ не содержит степени $z^{n-\mu}$).

Итак, в пределе получаем тождества (5.1) при $l = \overline{0, 2n-2}$ и $m = n + 1 - \mu$. Последнее равенство в (5.1) приходится исключить, поскольку из приведенного доказательства предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k$ не определяется (он существует в силу существования пределов от $Z_j^{(k)}$ и $z_j^{(k)}$ и, скорее всего, равен нулю). В результате приходим к (3.1), а значит и к (1.3) без последних уравнений. Вещественность АЧС следует из леммы 1 (исключение последнего уравнения в лемме роли не играет, т.к. $m < n$). ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Yazdekhashti and M. Mojiri, A method for harmonic extraction from power systems signals based on adaptive notch filter, *Advances in Computational Mathematics and its Applications* 1(1) (2012) 40–46.

- [2] С. Л. Марпл-мл., Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ., М.: Мир, 1990.
- [3] У. М. Сиберт, Цепи, сигналы, системы. В 2-х ч: Пер. с англ., М.: Мир, 1982.
- [4] R. Prony. Sur les lois de la Dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la Force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alkool, à différentes températures, J. de l'Ecole Polytech. 2(4) (1795), 28-35.
- [5] P. Chunaev and V. Danchenko. Approximation by amplitude and frequency operators, J. of Approx. Theory 207 (2016), 1-31.
- [6] В. И. Данченко, А. Е. Додонов, Оценки экспоненциальных сумм. Приложения, Проблемы математического анализа 67 (2012), 23-30. Перевод: V. I. Danchenko, A. E. Dodonov, Estimates for exponential sums. Applications, J. of Math. Sci. 188:3 (2013), 197-206.
- [7] J. J. Sylvester, On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants, Phil. Magazine 2 (1851), 391-410.
- [8] J. P. S. Kung, Canonical forms of binary forms: Variations on a theme of Sylvester. Invariant theory and tableaux (Minneapolis, MN, 1988), IMA Vol. Math. Appl. 19 (1990) 46-58, Springer, New York.
- [9] Y. I. Lyubich, The Sylvester-Ramanujan system of equations and the complex power moment problem, Ramanujan J. 8 (2004), 23-45.
- [10] D. Boley, F. Luk and D. Vandevoorde, Vandermonde factorization of a Hankel matrix, Scientific computing, 1997, 27-39, Springer, Singapore, 1997.
- [11] П. К. Суетин, Классические ортогональные многочлены. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- [12] В. В. Прасолов, Задачи и теоремы линейной алгебры, М.: Наука, 1996.